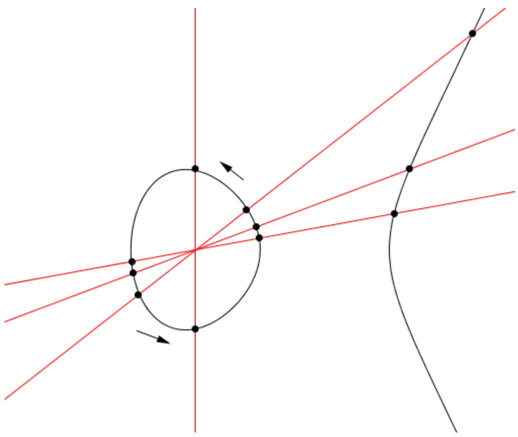
Ebene algebraische Kurven
Vorlesung 5

Jennifer Pütz

29.04.2016

(2.8) Asymptotische Richtungen

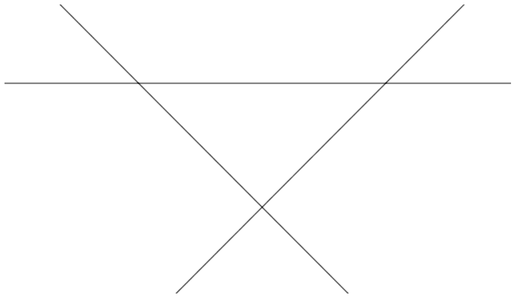
Beispiel 1:



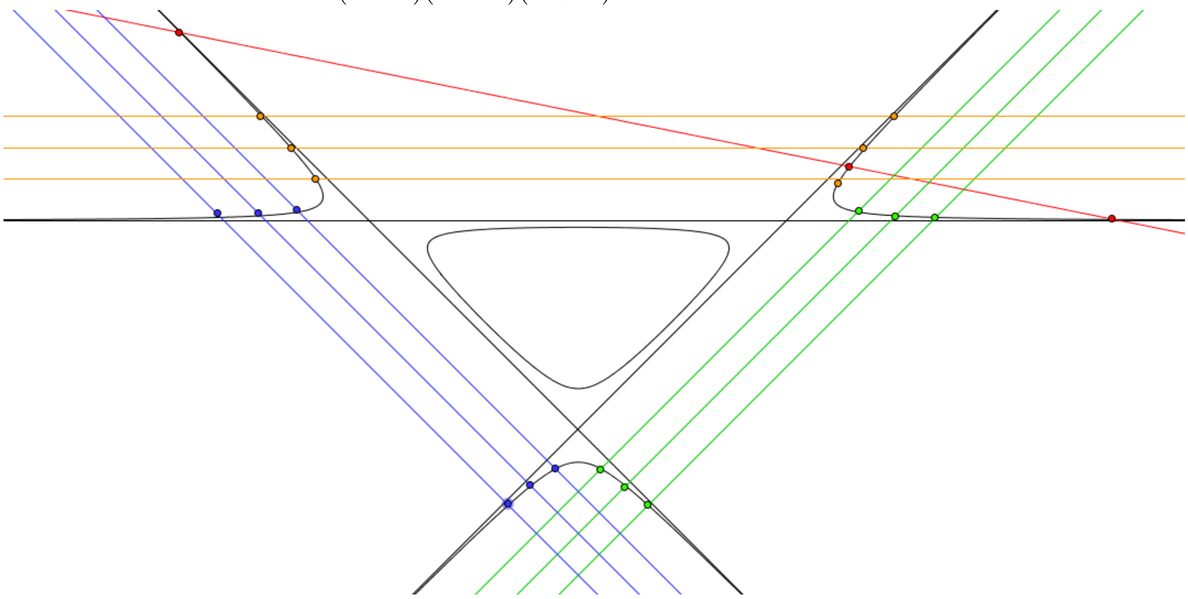
$Y^2 = X \cdot (X^2 - 1)$

Schneiden wir die Kurve $Y^2 = X \cdot (X^2 - 1)$ mit einer Geraden, so sehen wir, dass es jeweils genau drei Schnittpunkte gibt. Lassen wir die Steigung unserer Geraden aber gegen unendlich laufen, verschwindet der dritte Schnittpunkt scheinbar. Tatsächlich liegt er in diesem Fall im Unendlichen.

Beispiel 2:



$(Y-1)(X-Y)(X+Y)=0$



$(Y-1)(X-Y)(X+Y)=0,01$

Hier sehen wir, dass auch beim Schnitt dieser Kurve mit einer Geraden (rot) genau drei Schnittpunkte entstehen. Lediglich die drei Geradenscharen (orange, grün, blau), die parallel zu jeweils einer der drei Asymptoten unserer Kurve verlaufen, haben scheinbar nur zwei Schnittpunkte mit der Kurve. Jedoch liegt auch hier wie in Beispiel 1 der dritte Schnittpunkt jeweils im Unendlichen.

Parallelität: Zwei Geraden L und L',

$$\begin{aligned} L:\ &\alpha X - \beta Y + \gamma = 0, \qquad (\alpha, \beta) \neq (0{,}0),\\ L':\ &\alpha' X - \beta' Y + \gamma' = 0, \qquad (\alpha', \beta') \neq (0{,}0), \end{aligned}$$

heißen parallel, wenn

$$L || L' : \alpha\beta' - \alpha'\beta = 0.$$

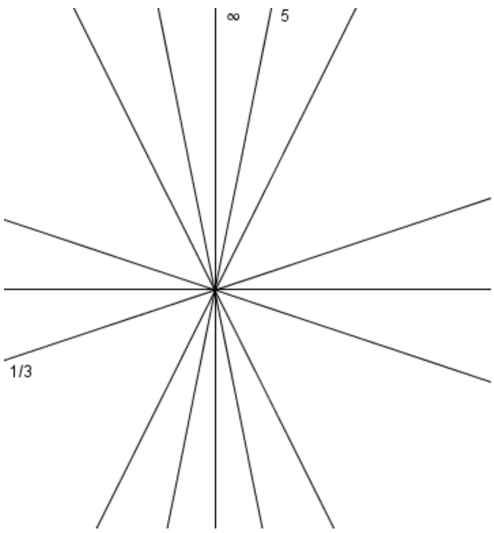
Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Geraden, wobei eine Richtung eine Äquivalenzklasse bzgl. $||$ ist.Eine solche Äquivalenzklasse

$$L = V(\alpha X - \beta Y + \gamma)$$

notieren wir mit $(\alpha : \beta)$, die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\mathbb{P}^1$. Den $\mathbb{P}^1$ können wir durch folgende Abbildung mit $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ identifizieren:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \overset{\text{„Steigung“}}{\longrightarrow} & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ (\alpha : \beta) & \mapsto & \dfrac{\alpha}{\beta}, \quad \beta \neq 0, \\ (\alpha, 0) & \mapsto & \infty, \end{array}$$

wobei $(\alpha : \beta) = (\lambda\alpha : \lambda\beta), \lambda \in \mathbb{C}^\times$.



Definition 1. $f(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ heißt *homogen vom Grad* d, wenn gilt

$$f(\lambda X, \lambda Y) = \lambda^d \cdot f(X,Y),$$

d.h. alle Monome von f haben Totalgrad d:

$$f(X,Y) = a_0 X^d + a_1 X^{d-1} Y + ... + a_d Y^d.$$

$\underline{d=1:}$	$a_0 X + a_1 Y$	Linearform,
$\underline{d=2:}$	$a_0 X^2 + a_1 XY + a_2 Y^2$	quadratische Form.

Definition 2. Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ ist Summe von homogenen Bestandteilen:

$$f = f_0 + f_1 + ... + f_d, d = \deg f,$$

mit $f_k \in \mathbb{C}[X,Y]_k :=$ Menge aller homogenen Polynome vom Grad k. Es ist also

$$f = \sum a_{ij} X^i Y^j, \qquad f_k = \sum_{i+j=k} a_{ij} X^i Y^j.$$

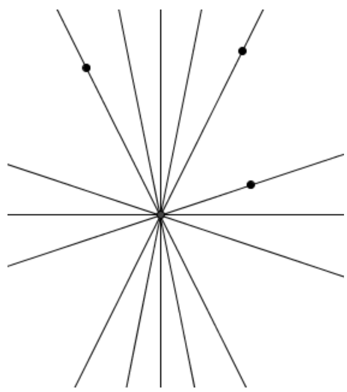
Proposition 3. *Ist $f(X,Y)$ ein homogenes Polynom, so ist $V(f)$ eine Vereinigung von Ursprungsgeraden und f ist ein Produkt von Linearformen:*

$$f(X,Y) = \prod_{i=1}^{d} (\alpha_i X - \beta_i Y), d = \deg f,$$

wobei $(\alpha_i : \beta_i) \in \mathbb{P}^1$ die Richtung von $V(\alpha_i X - \beta_i Y)$ ist.

Beweis.
Ist $(x,y) \in V(f)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^d = 0.$$



Also ist auch $(\lambda x, \lambda y) \in V(f)$. Also ist $V(f)$ Vereinigung von Ursprungsgeraden.

Ist $L := V(l) \subset V(f)$, so gilt $l|f$, d.h. $f = l_1 \cdot \tilde{f}$, wobei l_1 eine Linearform ist. Wir können verifizieren,

dass $\tilde{f}$ homogen vom Grad $d-1$ ist und erhalten
dann mit Induktion:

$$f = l_1 l_2 \cdots l_d.$$

□

Definition 4. Die asymptotischen Richtungen $AR(f)$ von f sind die Richtungen der Linearformen in f_d,

$$f_d = \prod_{i=1}^{d} (\alpha_i X - \beta_i Y) :$$

$$AR(f) := \{(\alpha_i, \beta_i), i = 1, ..., d\} \subset \mathbb{P}^1.$$

Ist $C = V(f)$, so setzen wir $AR(C) := AR(f)$.

Bemerkung 5. Wir sagen „Y^d kommt in f vor“, wenn $a_{0d} \neq 0$. Bemerke, Y^d kommt in f vor genau dann, wenn ∞ ist keine asymptotische Richtung ist. Dies gilt, da ∞ genau dann eine asymptotische Richtung ist, wenn wir f_d schreiben können als

$$f_d = X \cdot \tilde{f}_{d-1}.$$

Um die Bedeutung der asymptotischen Richtung zu verdeutlichen, betrachten wir nun eine parametrisierte Gerade mit Richtung $(\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1$:

$$x(t) = a + \beta t, \qquad y(t) = b + \alpha t.$$

Ist $f \in \mathbb{C}[X, Y], f = f_0 + f_1 + ... + f_d, f_k \in \mathbb{C}[X, Y]_k, C = V(f), L \cap C :$

$$\begin{aligned} f(a + \beta t, b + \alpha t) &= f_0 + f_1(a + \beta t, b + \alpha t) + ... + f_d(a + \beta t, b + \alpha t) \\ &= ... + f_d(\beta, \alpha) t^d, \end{aligned}$$

wobei „...“ vom Grad $\leq d-1$ in t ist. Hieraus sehen wir, dass
$\mathrm{Grad}_t f(a + \beta t, b + \alpha t) = d$ genau dann, wenn $f_d(\beta, \alpha) \neq 0$.

Für $f_d = \prod_{i=1}^{d}(\alpha_i X - \beta_i Y)$ gilt

$$0 = f_d(\beta, \alpha) = \prod_{i=1}^{d}(\alpha_i \beta - \beta_i \alpha)$$

genau dann, wenn für ein $i \in \{1, ..., d\}$

$$\alpha_i \beta - \beta_i \alpha = 0$$

oder auch $(\alpha_i : \beta_i) = (\alpha : \beta)$ gilt. Aber dies bedeutet gerade, dass $(\alpha : \beta)$ die asymptotische Richtung von C ist.

Folgerung 6. *Wenn $L \nsubseteq C$ und die Richtung von L eine asymptotische Richtung von C ist, dann gilt*

$$\#\{L \cap C\} \leq d - 1.$$

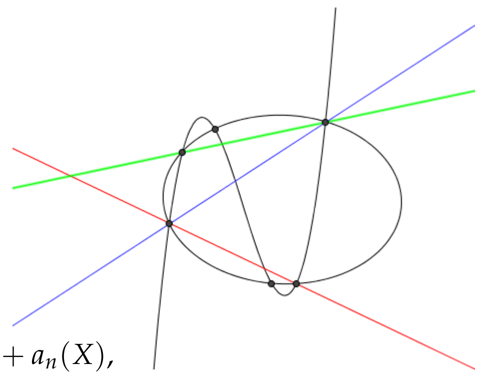
Satz 7. *Sind C, D affine algebraische Kurven, dann gilt*

$$\begin{aligned} &C \text{ und } D \text{ haben keine gemeinsamen Komponenten} \\ &\Leftrightarrow \#(C \cap D) < \infty \\ &\Leftrightarrow \#(C \cap D) \leq Grad(C) \cdot Grad(D). \end{aligned}$$

Beweis.

Da $\#(C \cap D) < \infty$ gibt es nur endlich viele Verbindungsgeraden zwischen Schnittpunkten. Zusammen mit asymptotischen Richtungen erhalten wir so eine endliche Menge $\Sigma \subset \mathbb{P}^1$ von Richtungen.

Nun drehen wir das Koordinatensystem so, dass $\infty \notin \Sigma$ und schreiben die Gleichungen von C und D aus:



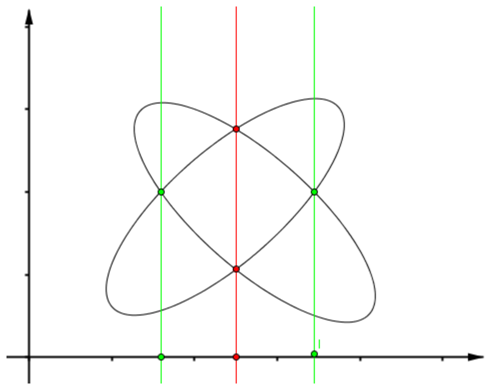
$$C : f(X, Y) = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + ... + a_n(X),$$
$$D : g(X, Y) = b_0(X)Y^m + b_1(X)Y^{m-1} + ... + b_m(X).$$

Dass $n = \text{Grad}(C)$, bedeutet, dass Y^n in f vorkommt, und analog folgt aus $m = \text{Grad}(D)$, dass Y^m in g vorkommt. Deswegen muss $\text{Grad}(a_i(X)) \leq i$ und $a_0 = a_0(X) \neq 0$, sowie $\text{Grad}(b_j(X)) \leq j$ und $b_0 = b_0(X) \neq 0$ gelten.

Weil ∞ keine der asymptotischen Richtungen ist, sind die $x-$Koordinaten aller Schnittpunkte unterschiedlich. Daraus folgt

$$\#(C \cap D) \leq \mathrm{Grad}(R_{f,g}) \leq n \cdot m = \mathrm{Grad}(C) \cdot \mathrm{Grad}(D).$$

$\square$



So nicht!

Folgerung 8. *Wenn zwei Kurven C, D mehr als $\deg C \cdot \deg D$ Schnittpunkte haben, so besitzen sie eine gemeinsame Komponente.*

Anwendung. *Durch 5 Punkte in der Ebene, wobei von diesen nicht 4 auf einer Geraden liegen, geht genau eine Kurve vom Grad 2. Wenn nicht 3 Punkte auf einer Geraden liegen, ist diese Kurve irreduzibel.*
Sei

$$f(X,Y) = a + bX + cY + dX^2 + eXY + fY^2$$

mit 6 Koeffizienten. Dann gilt, dass $P = (p,q) \in C = V(f)$

$$\Leftrightarrow 0 = a + bp + cq + dp^2 + epq + fq^2,$$

eine lineare Gleichung für $a, ..., f$. Die 5 Punkte $P_1, ..., P_5$ liefern uns 5 Gleichung in 6 Unbekannten; es gibt also eine nicht triviale Lösung. Sind $C' \neq C$ zwei Kurven vom Grad 2 durch die Punkte $P_1, ..., P_5$, so folgt, dass $\#(C \cap C') = \infty$, weshalb C und C' eine gemeinsame Komponente haben müssen und somit eine gemeinsame Gerade besitzen.